نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : .....

گروه آموزشی : **رياضي**

تاریخ : **۱۳۹۰/۸/۲۹**

وقت : **۷۵** دقیقه

دانشکده رياضي

امتحان میان ترم درس : **رياضي۱-فني (۱۴ گروه هماهنگ)**

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۳۹۱**-۱۳۹۰

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.
هر سوال در برگه مربوط به همان سوال در پاسخنامه جواب داده شود.
برای سوالهای ۳ و۴ که دو قسمتی هستند،
قسمت الف در یک طرف و قسمت ب در طرف دیگر برگه مربوط به همان سوال پاسخ داده شود.

سوال ۱ – معادله $1+z^2+z^4+z^6=0$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۲ – تابع $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le -1 \\ x^2 & -1<x \end{cases}$ داده شده است.

تابع g را به گونه ای بیابید که برای هر x داشته باشیم : $f\circ g(x)=x$ **۱۵ نمره**

سوال ۳ – الف) برای هر $x\ge -1$ و $x\neq 0$ داریم : $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[3]{1+x}}{1-\sqrt[4]{1+x}}$

مقدار $f(0)$ را طوری تعریف کنید که تابع f پیوسته باشد. **۱۰ نمره**

ب) مقدار $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left[\dfrac{1}{\sin^2 x}\right]$ را بیابید. **۵ نمره**

(توجه : استفاده از هم ارزي و هوپيتال مجاز نيست. اما مي دانيم : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$ ***)***

سوال ۴ – الف) مشتق بگیرید : $y=\tan^5(1+\cos\sqrt{x})^{10}$ **۱۰ نمره**

ب) نقطه $(1,4)$ روی منحنی تابع $f(x)=x^5+x^3+2x$ قرار دارد.

معادله خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} را در نقطه $(4,1)$ بنویسید. **۱۰ نمره**

سوال ۵ – نمودار تابع $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ را رسم کنید. **۱۵ نمره**

موفق باشید

جواب سوال۱ - روش اول : معادله ۶ جواب متمايز دارد. $1+z^2+z^4+z^6=0 \to (1+z^2)(1+z^4)=0$

$$1+z^2=0 \to z=\pm i \quad \& \quad 1+z^4=0 \to z=e^{\frac{2k\pi}{4}i}, k=0,1,2,3 \to z=(\pm 1\pm i)/\sqrt{2}$$

روش دوم : مي دانيم $1-z^8=(1-z^2)(1+z^2+z^4+z^6)$ معادله $1-z^8=0$ داراي ۸ ريشه $z=e^{\frac{2k\pi}{8}i}, k=0,1,\cdots,7$ است كه دو ريشه $z=\pm 1$ مربوط به $1-z^2=0$ است كه قابل قبول نيستند.

جواب سوال ۲- فرض كنيم تابع g معلوم است بنابر اين داريم $f\circ g(x)=\begin{cases} g(x)+2 & g(x)\le -1 \\ (g(x))^2 & -1<g(x)\end{cases}$ و بايد داشته باشيم :

$$\begin{cases} g(x)\le -1 \to g(x)+2=x \to g(x)=x-2 \to x-2\le -1 \to g(x)=x-2,\ x\le 1 \\ g(x)>-1 \to (g(x))^2=x \to g(x)=\pm\sqrt{x} \to \pm\sqrt{x}>-1 \to g(x)=\sqrt{x}, x>1\end{cases}$$

و در نتيجه $g(x)=\begin{cases} x-2 & x\le 1 \\ \sqrt{x} & 1<x\end{cases}$

جواب سوال ۳ – الف): روش اول : با تغيير متغير $1+x=t^{12}$ داريم

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{1-\sqrt[4]{1+x}}=\lim_{t\to 1}\frac{1-t^4}{1-t^3}=\lim_{t\to 1}\frac{1+t+t^2+t^3}{1+t+t^2}=\frac{4}{3} \quad \to f(0)=\frac{4}{3}$$

روش دوم :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{1-\sqrt[4]{1+x}}\times\frac{1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}{1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}\times\frac{1+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{(1+x)^2}+\sqrt[4]{(1+x)^3}}{1+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{(1+x)^2}+\sqrt[4]{(1+x)^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)}{1-(1+x)}\times\frac{1+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{(1+x)^2}+\sqrt[4]{(1+x)^3}}{1+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{(1+x)^2}+\sqrt[4]{(1+x)^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{(1+x)^2}+\sqrt[4]{(1+x)^3}}{1+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{(1+x)^2}+\sqrt[4]{(1+x)^3}}=\frac{4}{2}$$

ب)

$$\lim_{x\to 0} x^2\left[\frac{1}{\sin^2 x}\right] \quad \frac{1}{\sin^2 x}-1<\left[\frac{1}{\sin^2 x}\right]\le\frac{1}{\sin^2 x} \to \frac{x^2}{\sin^2 x}-x^2<x^2\left[\frac{1}{\sin^2 x}\right]\le\frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$\to \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2-x^2\right)<\lim_{x\to 0}x^2\left[\frac{1}{\sin^2 x}\right]\le\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \to 1<\lim_{x\to 0}x^2\left[\frac{1}{\sin^2 x}\right]\le 1 \to \lim_{x\to 0}x^2\left[\frac{1}{\sin^2 x}\right]=1$$

جواب سوال ۴ – الف):

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(-\sin\sqrt{x})\times 10(1+\cos\sqrt{x})^9\times\frac{1}{1+(1+\cos\sqrt{x})^{20}}\times 5\tan^4(1+\cos\sqrt{x})^{10}$$

$$y'=-25\,\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\times\frac{(1+\cos\sqrt{x})^9}{1+(1+\cos\sqrt{x})^{20}}\times\tan^4(1+\cos\sqrt{x})^{10}$$

ب) بايد شيب خط مماس يعني $(f^{-1})'(4)$ را حساب كنيم. مي دانيم $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}$ بنابر اين

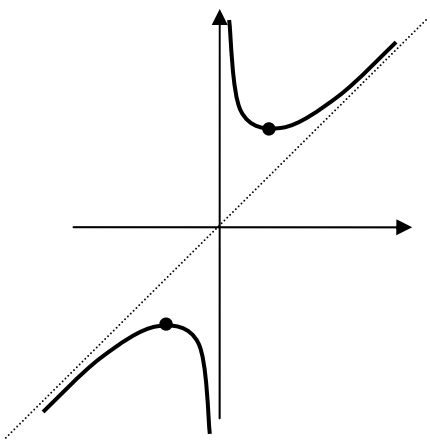
$(f^{-1})'(4)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(4)}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{10}$ پس معادله خط مماس برابر است با : $y-1=\frac{1}{10}(x-4)$.

جواب سوال ۵ - دامنه تابع، عبارت است از $D_f=R-\{0\}$ و داريم :

$\lim_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ اگر $f'(x)=0$ آنگاه $x=\pm 1$

و نقاط اكسترمم (احتمالي) تابع $\begin{vmatrix} x=1 \\ y=2\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} x=-1 \\ y=-2\end{vmatrix}$ هستند.



x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$